

遗传算法的计算性能的统计分析

岳 嵌 冯 珊

(华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

摘 要 通过对多维解析函数的多次重复计算并对计算结果进行统计分析来讨论遗传算法的可靠性和可信度, 结果表明: 遗传算法的计算结果具有一定的稳定性, 可以通过采用多次重复计算的方法提高计算结果的可信度, 并用以评价算法及其改进的实际效果.

关键词 遗传算法; 计算可靠性; 置信区间

中图法分类号 TP18 DOI号: 10.3724/S.P.J.1016.2009.02389

The Statistical Analyses for Computational Performance of the Genetic Algorithms

YUE Qin FENG Shan

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract In this paper, the authors discuss the reliability of the GAs by reiteratively computing the multi-dimensional analytic functions and statistical analysis of the results. The analysis results show that the GAs have certain stability; it could improve the reliability by reiteratively computation and estimates the effects of improvements.

Keywords genetic algorithms; computational stability; confidence interval

1 遗传算法的随机性

遗传算法是将生物学中的遗传进化原理和随机优化理论相结合的产物, 是一种随机性的全局优化算法^[1]. 遗传算法作为一种启发式搜索算法, 其计算结果具有不稳定性 and 不可重现性; 遗传算法的进化过程具有有向随机性, 整体上使种群的平均适应度不断提高. 现在学术界对遗传算法中的某些遗传操作的作用机制还不十分清楚. 遗传算法的许多性能特点无法在数学上严格证明. 遗传算法的计算过程会受到各种随机因素的影响, 如随机产生的初始种群和随机进行的变异操作等, 尤其初始种群对计算结果影响较大. 但另一方面, 大量的实算结果表明, 遗传算法的计算结果具有一定的规律性, 在统计意义上具有一定的可靠性, 这样就可以对待求解问题

进行多次重复计算后取平均值的方法, 提高遗传算法在实际计算中的准确性和可信度.

包括遗传算法在内的启发式搜索算法主要用于解决大型的复杂优化问题, 这些问题一般难以使用传统的优化算法解决. 遗传算法对这类问题的计算结果也难达到精确的最优解. 这给对用遗传算法解决实际工程优化问题的计算结果的评价带来了困难, 在实际工程计算中也难以评价遗传算法及其改进型的计算效果的优劣.

为了分析遗传算法的计算性能, 本文采用的计算对象是一个复杂的多维解析函数. 使用这类函数评价遗传算法计算性能的好处是可以事先通过其他方法求得最优解, 这样便于评价遗传算法及其改进型的计算效果. 本文从统计学角度对多次重复计算的结果进行分析, 试图得到遗传算法的稳定性和可信度方面的相关结论, 通过分析遗传算法及其改进

型求解解析问题的计算效果, 再把所得到的相关结论推广应用到复杂的工程实际问题中去.

遗传算法在实际使用中有多形式的变型, 经典遗传算法是遗传算法的最简单的形式, 但是经典遗传算法并不理想. 本文使用的是粗粒度并行遗传算法. 粗粒度并行遗传算法是遗传算法的一个重要改进型. 它具有比经典遗传算法更好的计算性能.

2 算例、实验方法和实验结果

2.1 算 例

本文所使用的算例是 Deb 函数:

$$f_{\text{Deb}}(x_i) = \frac{10 + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(4\pi \cdot x_i)]}{n}, \quad x_i \in [-10, 10] \quad (1)$$

Deb 函数是一个高维的非凸函数, 该函数在点 (9.7624, 9.7624, ..., 9.7624) 上取得最大值: 115.1833. 本文对 $n=10$ 的情况进行计算.

2.2 实验参数

为了保证小数点后四位的精度, 10 个输入变量都采用 18 位二进制表示, 也就是说个体的总串长是 180 位. 杂交率取 0.75, 变异率取 0.15. 本文采用的粗粒度并行遗传算法的参数设置参考文献[3], 具体取值为: 种群规模为 180、最大进化代数数为 200、子种群的个数为 9. 实验进行 50 次重复计算.

2.3 实验结果

用粗粒度并行遗传算法重复计算 Deb 函数 50 次, 得到 50 个计算结果并由小到大排序如表 1 所示.

表 1 50 个重复计算结果按大小重新排序				
计算结果排序				
115.1538	115.1553	115.1553	115.1576	115.1577
115.1579	115.1591	115.1601	115.1609	115.1610
115.1616	115.1627	115.1629	115.1643	115.1649
115.1658	115.1673	115.1673	115.1678	115.1685
115.1685	115.1693	115.1698	115.1706	115.1706
115.1709	115.1716	115.1716	115.1724	115.1726
115.1728	115.1742	115.1746	115.1749	115.1750
115.1753	115.1760	115.1767	115.1773	115.1776
115.1776	115.1780	115.1780	115.1785	115.1785
115.1788	115.1791	115.1793	115.1796	115.1802

由表 1 数据可以得到这些数据的统计参数: 其方差为 0.000058058; 均方差为 0.007620; 均值为 115.1696.

由于这 50 个计算结果都分布于 115.1525 至

115.1825 之间, 将其分为 6 个子区间, 可得概率分布的直方图如图 1 所示.

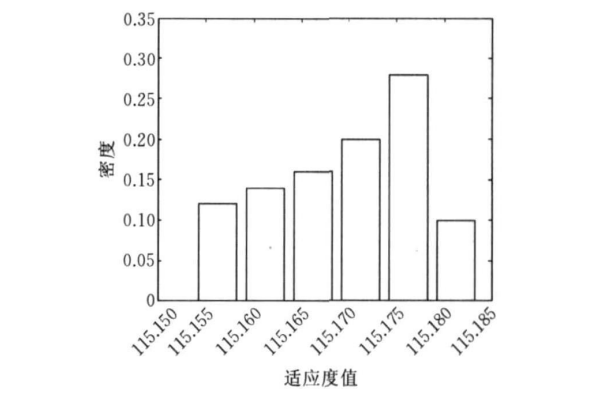


图 1 50 个计算结果的概率分布直方图

3 计算结果的统计分析

3.1 计算结果初步分析

由于遗传算法具有随机性, 50 个数据难以精确描述计算结果的密度分布状况. 但是从图 1 平滑后的大致形状可以判断, 计算结果的概率分布与威布尔分布相似, 是中间高两边渐低、最高峰偏向一边的不对称的单峰形状. 威布尔分布的密度函数如下式.

$$p_{\text{wbl}}(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \lambda \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\lambda > 0, \alpha > 0, \lambda, \alpha$ 为常数.

但是由于 Deb 函数是求最大值的优化问题, 计算结果存在最大值 115.1833, 且计算结果高峰偏向右边; 而威布尔分布的最小值为 0, 且最高峰偏向左边. 所以在用威布尔分布对计算结果做统计分析之前, 应该先进行数据预处理, 对计算结果做如下变换:

$$X' = 115.1833 - X \quad (3)$$

对 X' 进行统计分析完后, 再用式(4)变换回来.

$$X = 115.1833 - X' \quad (4)$$

3.2 采用威布尔分布的统计分析

如果遗传算法的计算结果服从威布尔分布, 即 $X \sim W(\lambda, \alpha)$, 因为实际参数 λ 和 α 均未知, 根据区间估计原理, 取置信度为 95%, 可以得到计算结果的相关参数的区间估计:

平均值的置信度为 95% 的置信区间为 (115.1673, 115.1714), 方差的置信度为 95% 的置信区间为 (0.00005166, 0.00006402), 则均方差的置信度为 95% 的置信区间为 (0.007188, 0.008001).

如果将置信度设为 98%, 则参数的置信区间如下:

平均值的置信度为 98% 的置信区间为 (115.1668, 115.1716)。

方差的置信度为 98% 的置信区间为 (0.00005091, 0.00006588); 均方差的置信度为 98% 的置信区间为 (0.007135, 0.008117)。

从以上数据可以看出: 将置信度从 95% 提高到 98% 时, 平均值的置信区间的长度从 0.0041 提高到 0.0052, 均方差的置信区间的长度从 0.000813 提高到 0.000982, 增加的比例都为百分之二十几。置信区间的长度越小越好, 因为置信区间的长度反映了参数估计的精确程度。

3.3 采用正态分布分析的统计分析

因为遗传算法的计算结果并不完全符合威布尔分布, 而用不同分布形式分析计算结果的差别未知, 所以本文使用另一种常见分布分析计算结果, 再和威布尔分布的分析结果做比较, 用于评估这种统计分析的准确性。本文使用的是正态分布, 正态分布也是中间高两边渐低的单峰形状, 但是正态分布是对称的。

如果计算结果服从正态分布, 即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 根据区间估计原理, 可得置信度为 95% 的参数的置信区间如下:

μ 的置信度为 95% 的置信区间为 (115.1674, 115.1718); σ^2 的置信度为 95% 的置信区间为 (0.000041339, 0.000091996); σ 的置信度为 95% 的置信区间为 (0.006430, 0.009591)。

如果将置信度提高为 98%, 则参数的置信区间如下:

μ 的置信度为 98% 的置信区间为 (115.1670, 115.1723); σ^2 的置信度为 98% 的置信区间为 (0.000038751, 0.00010030); σ 的置信度为 98% 的置信区间为 (0.006225, 0.010015)。

从以上数据可以看出: 将置信度从 95% 提高到 98% 时, 平均值的置信区间的长度从 0.0044 提高到 0.0053, 均方差的置信区间的长度从 0.003161 提高到 0.003790, 增加的比例也都约为 20%。

3.4 两种分布的分析结果的比较

从 3.2 节和 3.3 节的统计分析结果可以看到: 使用同样的置信度时, 用威布尔分布进行统计分析所得到的置信区间比正态分布所得到的置信区间更小。根据统计学原理^[4], 对统计样本所使用的分布越准确, 分析所得到的置信区间越小, 这也说明遗传算

法对 Deb 函数的计算结果更符合威布尔分布。由于计算结果也并非精确符合威布尔分布, 可以假设计算结果符合某种未能确知的分布, 则如果采用这种未知分布进行统计分析, 所得到的置信区间应该比用威布尔分布分析所得到的置信区间更小。也就是说, 遗传算法的计算可靠性比用威布尔分布分析所得到的结果更好。

从 3.2 节和 3.3 节对参数的置信区间的计算可以看出, 威布尔分布和正态分布所得到的结果差别不大; 而遗传算法的计算结果的密度函数图形和威布尔分布的密度函数图形很相似, 其相似度高于正态分布和威布尔分布的密度函数图形的相似度。既然威布尔分布和正态分布的分析结果差别不大, 那么用威布尔分布分析的结果应该和实际参数的差别更小。所以可以认为用威布尔分布分析遗传算法的计算结果已经具有较高的准确性和可信度。

3.5 对重复计算次数的讨论

虽然无法判定遗传算法的计算结果符合哪种分布, 但是根据概率论原理, 如果随机变量 X 符合均值为 μ 、均方差为 σ 的某种分布, 那么 50 个同样的随机变量的均值 \bar{X} 符合均值为 μ 、均方差为 $\frac{1}{\sqrt{50}}\sigma$ 的同样形式的分布。

同样的, 如果要将计算结果的精度提高 10 倍, 就需要将计算的次数增加 100 倍。但是遗传算法是用于解决那些用普通优化算法难以解决的大型复杂优化问题, 实际使用遗传算法时无法进行很多次的重复计算, 也就是说很难通过增大重复计算次数的方法基本消除遗传算法的随机性。只能在一定可行度的条件下达到计算结果的精度。

相对来说提高置信度对重复计算次数的要求就不是很高了。根据统计学原理, 如果要将置信区间的长度缩减 20%, 则重复计算次数应该提高 $\left(\frac{1}{1-20\%}\right)^2 - 1 = 56.25\%$ 。也就是说, 如果用威布尔分布分析遗传算法的计算结果时, 要在保持统计分析精度的情况下将置信度从 95% 提高到 98%, 只需要多进行约 60% 的计算量。

现在, 遗传算法在理论上很难有所突破, 在这种情况下, 对优化问题的实际计算成为了验证遗传算法的可行性和有效性的一种有效手段。而作为一种带有很强随机性的启发式搜索算法, 实算中的不确定性只有通过多次计算的方法减弱。本文通过对已知最优解的解析问题的求解, 得出量化评价遗传算

法中的随机因素的方法. 在理论上无法严格证明的遗传算法的某些性能和特点可以通过本文所提出的方法来证实或证伪, 即通过对多次重复计算的结果进行统计分析来评价这些算法和算法改进的效果, 以使算法及其改型推广到工程实际问题.

4 结 论

通过对测试函数用遗传算法的多次求解计算和分析, 可以得出以下结论:

(1) 使用遗传算法解决优化问题虽然存在一定的不确定性, 但同时遗传算法又具有一定的稳定性, 可以通过采用多次重复计算然后取平均值的方法, 提高计算结果的可信度.

(2) 遗传算法的计算精度可以通过对多次重复计算的结果进行统计分析得出.

(3) 很难通过增大重复计算次数的方法基本消除遗传算法的随机性.



YUE Qin, born in 1977, Ph. D. candidate. His current research interest focus on evolutionary computation.

Background

Genetic algorithms (GAs) are optimization algorithms developed by integrating genetic evolution rules and stochastic optimization theory. As a kind of heuristic searching algorithms, the computation results are unstable and unreplicative; the evolution process has directional randomness, which increase the general average of the fitness value of population. In the present, few works are available for the process mechanisms of genetic operations; many assumptions can not be proved mathematically. The computation process of GAs will be affected by kinds of stochastic perturbations such as random initial population and stochastic mutation operation, especially affected by the random initial population. On the other hand, many examples show that the results of GAs have certain reliability in statistical sense, which inspires us improve the reliability of GAs by the method of taking average value of reiteratively computation.

Heuristic searching algorithms including GAs are usually used to solve the large-scale complex optimization problems, which could not be done by traditional optimization arithmetic.

参 考 文 献

- [1] Holland J H. Building blocks, cohort genetic algorithms, and hyperplane-defined functions. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(4): 373-391
- [2] Wang L, Maciejewski A A, Siegel H J. A comparative study of five parallel genetic algorithms using the traveling salesman problem// *Proceedings of the 1st Merged International Parallel Processing Symposium and Symposium on Parallel and Distributed Processing*. Los Alamitos, CA, 1998: 345-349
- [3] Yue Qin, Feng Shan. Performance analysis of the coarse-grained parallel genetic algorithms. *Journal of Wuhan University of Technology (Natural Science Edition)*, 2008, 30(7): 8-10(in Chinese)
(岳钦, 冯珊. 粗粒度并行遗传算法的计算性能分析. *武汉理工大学学报(自然科学版)*, 2008, 30(7): 8-10)
- [4] Liu Shun-Zhong. *Theory and Applications of Statistics*. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2005(in Chinese)
(刘顺忠. *统计理论与应用*. 武汉: 华中科技大学出版社, 2005)

FENG Shan born in 1933, professor, Ph. D. supervisor. Her main research interest focus on intelligent decision support system.

The results computed by GAs to these problems may not reach the exact solution either, which bring difficulties in evaluations for practical engineering optimization computation results.

Many forms of GAs are used in practical. The classical GA is the simplest form, but it is lack of practicality. This paper uses the coarse-grained parallel genetic algorithm(CP-GA), which is a important improved form of GAs. The coarse-grained parallel genetic algorithm has better performance than the classic GA. The CPGA can solve the contradiction of premature convergence and slowness of local convergence.

As a kind of heuristic searching algorithms, the computation results are unstable and unreplicative. In the present, few works are available for the process mechanisms of genetic operations; thus many assumptions cannot be proved mathematically. The computation process of GAs will be affected by kinds of stochastic perturbations. On the other hand, many examples show that the results of GAs have certain reliability in statistical sense.